PÉRIODOGRAMME

PRINCIPE

Périodogramme

Le périodogramme est une méthode d'estimation de la densité spectrale de puissance d'un signal. La méthode directe de calcul du périodogramme utilise la transformée de Fourier rapide (*FFT*) du signal.

$$P = \frac{\left| fft(S) \right|^2}{N}$$

Cette méthode permet de calculer rapidement la densité spectrale de puissance d'un signal échantillonné de durée finie, même s'il est périodique.

Cet estimateur est biaisé et présente une variance non nulle.

Périodogramme moyenné

Pour améliorer les performances de l'estimateur précédent on calcule plusieurs périodogrammes sur des signaux indépendants. La sinusoïde est la même pour les différents signaux mais le bruit est indépendant pour chaque réalisation. On calcule ensuite la moyenne des différents périodogrammes.

Cette méthode réduit la variance d'un facteur égal au nombre de périodogrammes calculés.

Périodogramme lissé (de Welch)

La méthode de Welch consiste à calculer plusieurs périodogrammes à partir d'un unique signal en utilisant une fenêtre glissante. Il s'agit d'une fenêtre rectangulaire de taille très inférieure à la taille du signal glissant d'échantillon en échantillon.

Cette méthode réduit le biais de l'estimateur.

Caractéristiques des estimateurs

Chacun de ces estimateurs peut être caractérisé par une étude statistique dont les résultats sont le biais et la variance.

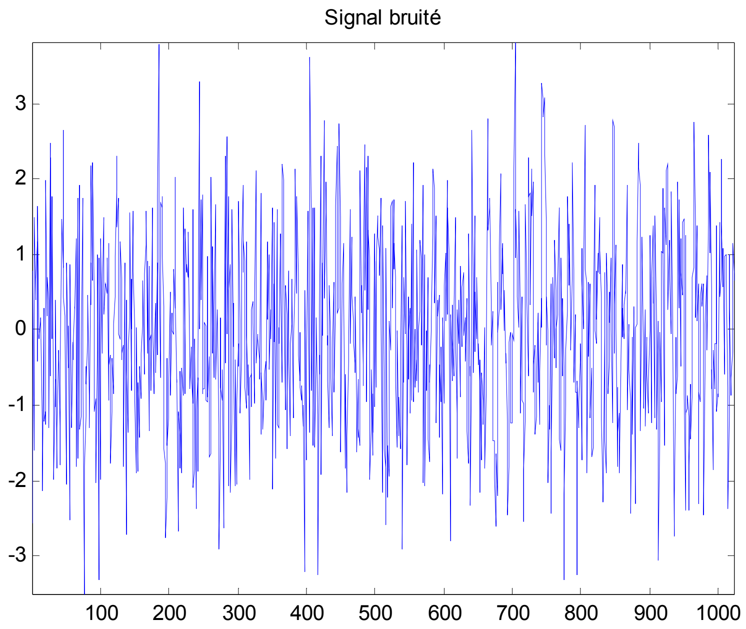
Une fonction 'stats' permet de calculer ces caractéristiques. Cette fonction suppose que la moyenne du périodogramme est nulle. Il faut donc faire ces calculs sur le périodogramme du bruit.

```
function [biais,variance]=stats(S)
N = length(S);
biais = mean(S);
variance = 0;
for i = 1 : N
   variance = variance + ((S(i)-biais)^2);
end
variance = variance / N;
return
```

ÉTUDE DES DIFFÉRENTES MÉTHODES

Signal d'entrée

Chacune des méthodes va être évaluée à partir du même signal. Ce signal est un sinus de fréquence 100Hz échantillonné à 2kHz sur une longueur de 1024 échantillons. Ce signal est noyé dans un bruit blanc gaussien. La valeur moyenne de ce bruit est nulle et sa variance égale à 1.



Périodogramme simple

Le périodogramme simple est calculé à partir du principe énoncé ci-dessus. La fonction de calcul a été écrite sous Matlab. Cette fonction ne prend qu'un seul argument, les échantillons du signal et retourne son périodogramme.

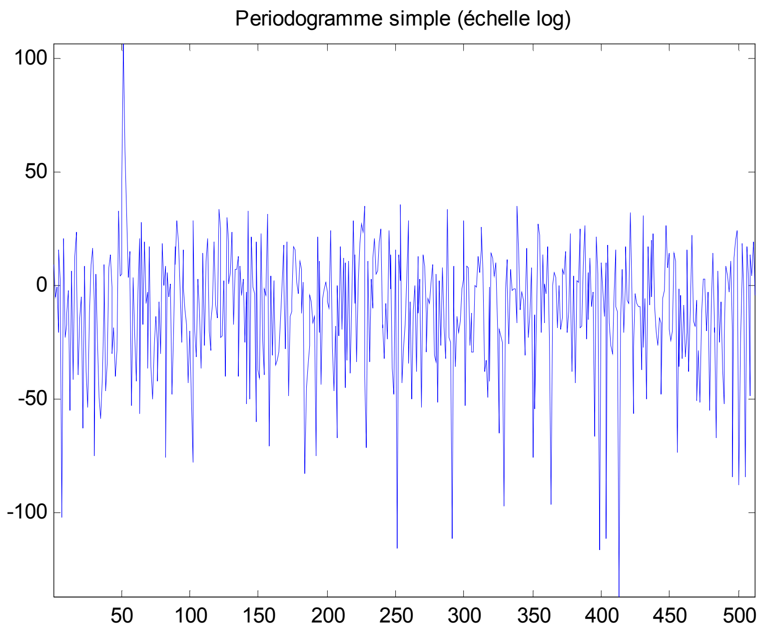
```
function P = periodogramme(S)
N = length(S);
Y = fft(S,N);
Y = abs(Y);
P = (Y.^2)/N;
return
```

Le signal traité contient un nombre fini d'échantillons. Cette limitation peut être vue comme la multiplication du signal par une fenêtre rectangulaire valant 1 uniquement à l'endroit de ces échantillons.

Fenêtre rectangulaire

La première fenêtre utilisée est rectangulaire, c'est la fenêtre la plus simple qui est utilisée inconsciemment en limitant le nombre d'échantillons du signal.

Le périodogramme simple occupe une plage de valeurs importantes. En le traçant sur une échelle logarithmique, la fréquence du sinus est associée à un pic d'amplitude supérieure à 100dB et le bruit blanc est représenté comme variant entre une trentaine de décibels et −140dB sur toutes les fréquences représentées.

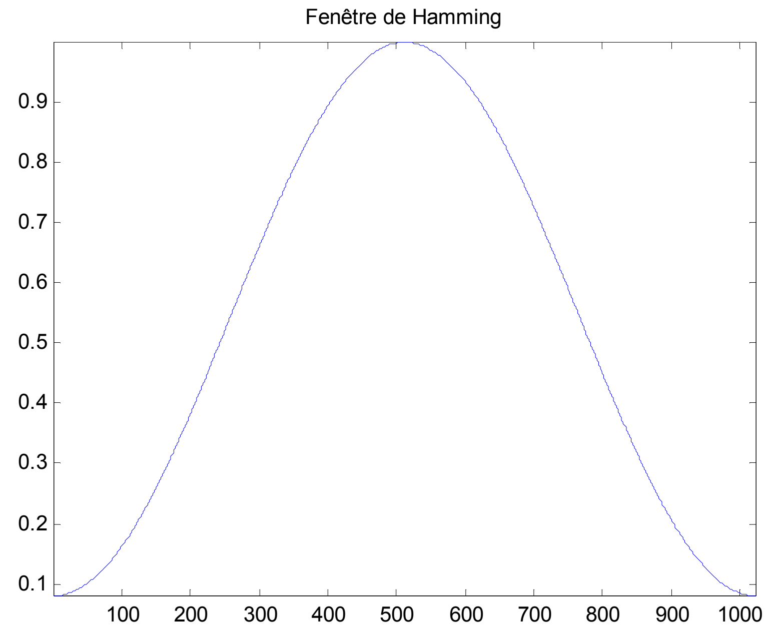


Cet estimateur est biaisé et présente une variance non nulle. Ces statistiques ont mesurées en présentant uniquement le bruit en entrée de l'estimateur.

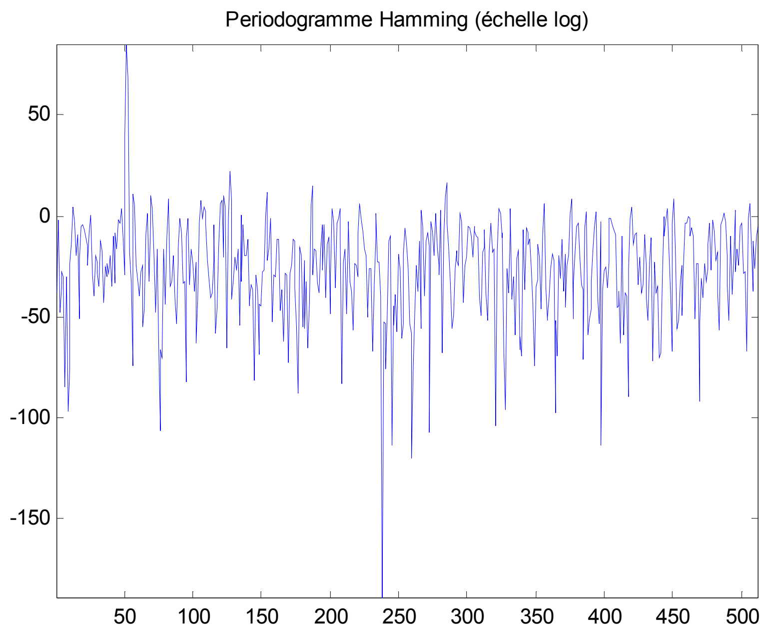
```
Biais de l'estimateur :
    1.1449

variance de l'estimateur :
    1.3183
```

Fenêtre de Hamming

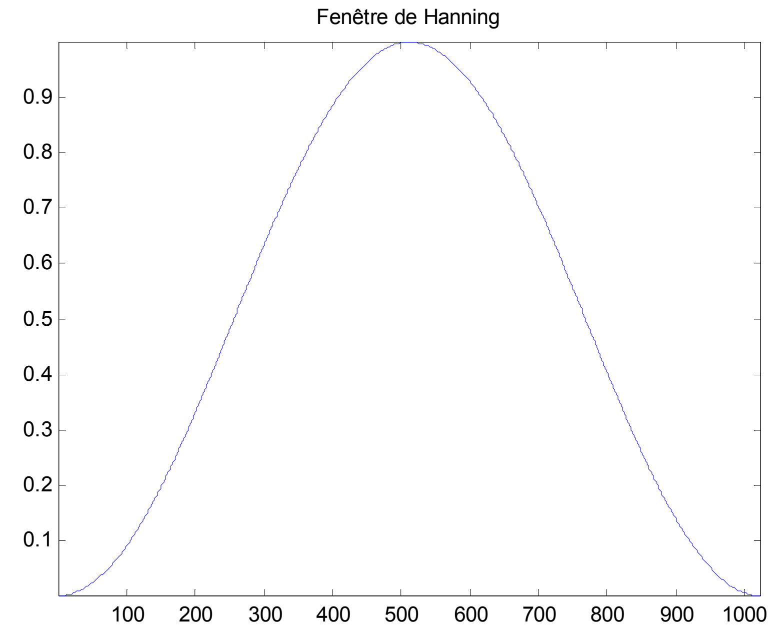


On réalise une multiplication temporelle avec cette fenêtre. Cette modification du signal a une influence sur le périodogramme calculé.

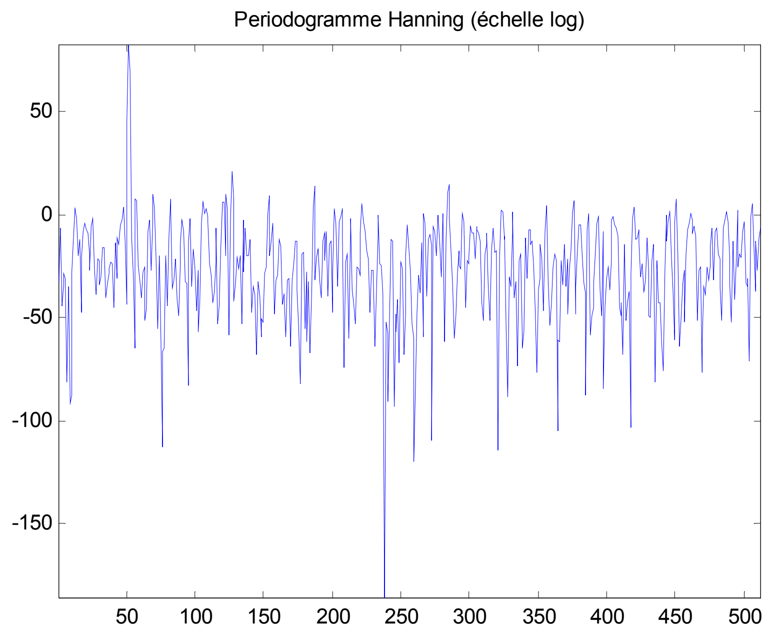


On remarque que l'intégralité des amplitudes se trouve diminuée. Les composantes représentatives du bruit se retrouvent proches de 0dB. Il est donc plus facile de distinguer le signal du bruit.

Fenêtre de Hanning



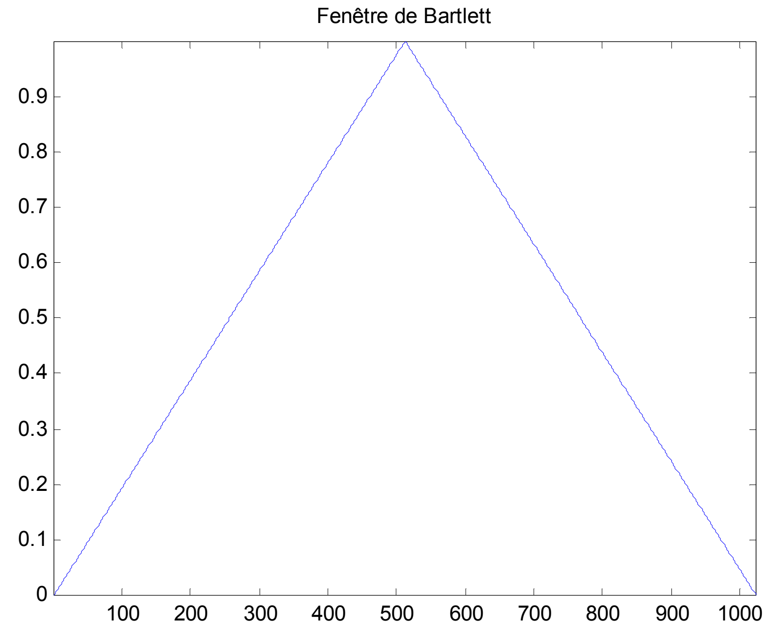
Le périodogramme se trouve, une fois encore, changé.



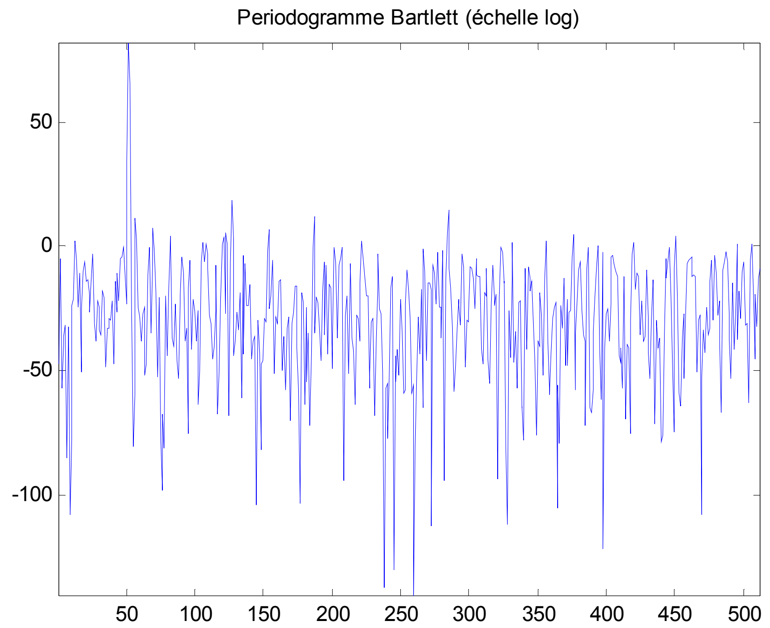
Le niveau du bruit est encore une fois diminué. Il est encore plus facile de distinguer le signal du bruit.

Fenêtre de Bartlett

Il s'agit d'une fenêtre triangulaire.



L'effet sur le périodogramme est plus flagrant que pour les deux fenêtres précédentes.



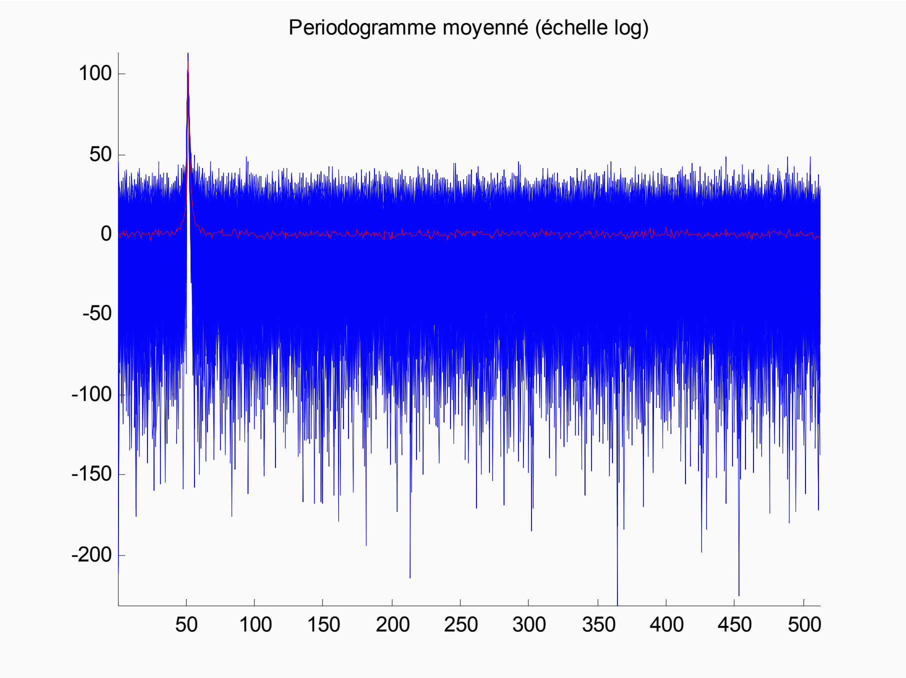
L'écart entre le niveau du pic fréquentiel correspondant à la sinusoïde et le niveau du bruit est augmenté.

Périodogramme moyenné

Pour mieux séparer le signal du bruit, on peut moyenner plusieurs périodogrammes. Le signal est a priori toujours le même, le bruit, en revanche, est aléatoire. Chacun des périodogrammes devra donc être calculé à partir de signaux bruités différemment les uns des autres. Tous les périodogrammes sont sauvegardés puis la moyenne est calculée élément par élément.

```
for i=1 : nb_periodo
      bruit = randn(1,N)*var_bruit;
      signal = sin + bruit;
      P1 = periodogramme(signal);
      plot(20*log(P1(1:round(N/2))), 'b')
      P = [P ; P1];
end
Pmoy = mean(P);
```

La variable 'Pmoy' contient le périodogramme moyenné. Si on trace sa variation en échelle logarithmique, on obtient le graphe suivant :



Cette méthode permet de mieux distinguer les composantes du signal de celles du bruit. Le calcul étant plus complexe, cette méthode n'est pas envisageable dans des applications temps-réel. Par ailleurs, les performances de cet estimateur sont améliorées en terme de variance.

```
Biais :
    1.0083

Variance :
    0.0051
```

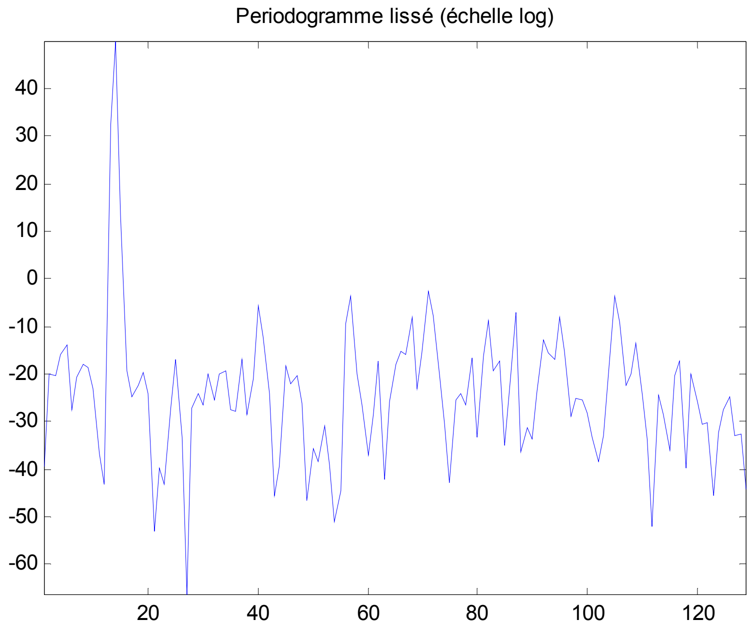
Périodogramme lissé (de Welch)

La méthode de Welch consiste à pondérer le signal par une fenêtre glissante (fenêtre de Hanning de largeur 256 échantillons). Pour chaque position de la fenêtre, on calcule le périodogramme, puis on calcule la moyenne de tous les périodogrammes.

Le périodogramme lissé est calculé à partir de la fonction 'pwelch' qui se charge de la multiplication temporelle par la fenêtre glissante et de l'estimation de la densité spectrale de puissance.

```
P1 = pwelch(signal);
```

La variable P1 contient le périodogramme lissé du signal. En le traçant sur une échelle logarithmique, on obtient le résultat suivant :



Le niveau général des composantes du bruit se trouve largement inférieur à 0dB. Le niveau du pic fréquentiel est, en revanche, très important (50dB). On peut donc bien distinguer la sinusoïde du bruit.

Cet estimateur a les performances suivantes :

```
Biais :
    0.3787

Variance :
    0.1047
```

Cette méthode d'estimation est donc sans biais.

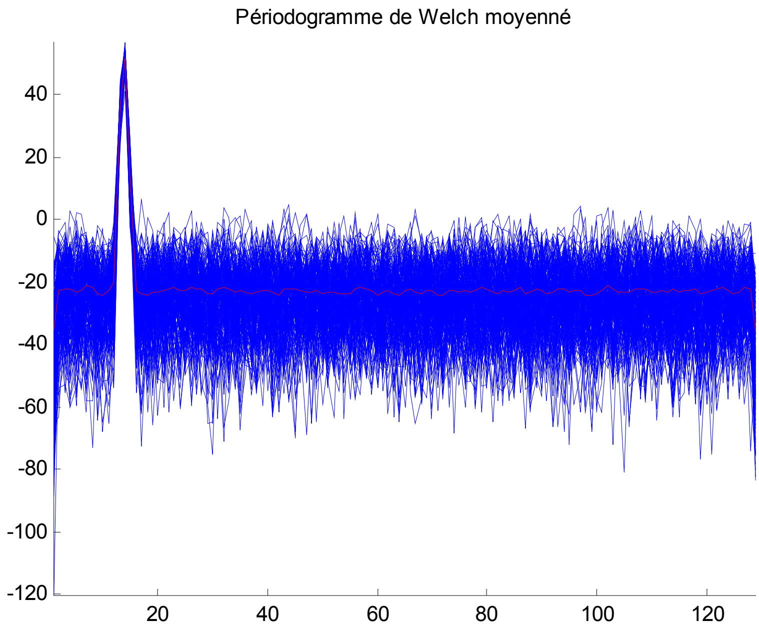
L'utilisation de la méthode de Welch permettant d'obtenir un estimateur non biaisé et le moyennage de périodogrammes un estimateur à faible variance, le moyennage de périodogrammes de Welch nous permettra d'obtenir une estimation sans biais ni variance.

Périodogramme de Welch moyenné

Cette méthode reprend le principe du périodogramme moyenné en utilisant la méthode de Welch dans le calcul de chaque périodogramme.

```
for i=1 : nb_periodo
    bruit = randn(1,N)*var_bruit;
    signal = sin + bruit;
    P1 = pwelch(signal);
    plot(20*log(P1'), 'b')
    P = [P ; P1'];
end
Pwm = mean(P);
```

La variable 'Pwm' contient la moyenne des différents périodogrammes de Welch. On la trace sur une échelle logarithmique :



Les performances de cet estimateur sont considérablement meilleures que celles des autres méthodes :

```
Biais :
    0.3189

Variance :
  9.7721e-004
```

CONCLUSION

Le périodogramme est une méthode simple d'estimation de la densité spectrale de puissance d'un signal échantillonné. Cet estimateur présente des défauts (biais, variance) qui peuvent être gênants selon l'utilisation que l'on en fait.

Il est possible de réduire le biais en utilisant la méthode de Welch par multiplication temporelle entre le signal et une fenêtre glissante.

Il est possible de réduire la variance en moyennant plusieurs périodogrammes de différents échantillons du même signal.

L'amélioration des performances se fait au détriment du temps de calcul et le calcul d'une estimation non biaisée et à variance nulle ne permet pas le traitement en temps-réel des signaux.